TEMA n. 1.

Esercizio 1. È dato un segmento di lunghezza L.

(i) Si suddivida il segmento, mediante la scelta di due punti interni, in tre segmenti di lunghezza rispettivamente x, y e $L-x-y$. Si disegni nel piano, con un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, l'insieme P contenente i punti (x,y) che è possibile trovare con la costruzione precedente e il suo sottoinsieme Q contenente i punti (x,y) per cui i tre segmenti corrispondenti formano un triangolo. Si calcoli il rapporto tra l'area di Q e l'area di P.

Si osservi che ammettere i casi singolari dove una delle parti ha lunghezza nulla, o dove il triangolo si riduce a un segmento, non altera le aree e quindi non altera la risposta al problema.

(ii) Si suddivida il segmento, mediante la scelta di tre punti interni, in quattro segmenti di lunghezza rispettivamente x, y, z e $L-x-y-z$. Si disegni nello spazio, con un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, l'insieme P contenente i punti (x,y,z) che è possibile trovare con la costruzione precedente e il suo sottoinsieme Q contenente i punti (x,y,z) per cui i quattro segmenti corrispondenti formano un quadrilatero. Si calcoli il rapporto tra il volume di Q e il volume di P.

Esercizio 2. Sia $A = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$ dove $0 < p+q < 1$.

Fissato $w_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ definiamo per ricorrenza la successione $w_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A\, w_{n-1}$.

(i) Trovare autovalori e autovettori di A.

(ii) Trovare la condizione affinchè $\{a_n\}$ sia crescente.

(iii) Trovare $\lim_n a_n$ in dipendenza da w_1.

Esercizio 3. (i) Sia Σ un insieme di enunciati contenenti

a) $\forall x \forall y (x \le y \lor y \le x)$ e

b) $\forall x \forall y \forall z (x \le y \land y \le z \to x \le z)$

Dimostrare che se Σ ha un modello infinito allora ha un modello che contiene una catena discendente infinita.

(ii) Dimostrare in un sistema formale con uguaglianza che se R è una relazione simmetrica, transitiva e tale che per ogni x esiste y tale che xRy allora R è riflessiva.

(iii) Dimostrare che il seguente enunciato è equivalente all'assioma della scelta:.

> *Se f è una applicazione suriettiva da X su Y, allora esiste una applicazione $g: Y \to X$ tale che $f \circ g$ è l'identità su Y.*

Esercizio 4. Sia G un gruppo abeliano e si definisca $T(G) = \{g \in G \mid g \text{ ha periodo finito}\}$.

1. Dimostrare che $T(G)$ è un sottogruppo di G.
2. Si definisca il sottogruppo H come $H/T(G) = T(G/T(G))$. Provare che $H = T(G)$.
3. Mostrare infine che, se G non è abeliano, allora non sempre $T(G)$ è un sottogruppo di G.

Sia ora $\mathbb{P}$ l'insieme dei primi di $\mathbb{N}$ e, per ogni $p \in \mathbb{P}$ sia G_p un gruppo ciclico di ordine p. L'insieme

$$G = \mathrm{Cr}_{p\in\mathbb{P}} G_p = \{(x_p)_{p\in\mathbb{P}} \mid x_p \in G_p \quad \forall\, p \in \mathbb{P}\}$$

è un gruppo rispetto all'operazione

$$(x_p)_{p\in\mathbb{P}}(y_p)_{p\in\mathbb{P}} = (x_p y_p)_{p\in\mathbb{P}}.$$

Descrivere gli elementi di $T(G)$.

Esercizio 5. Si consideri il campo con 8 elementi nella rappresentazione

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1).$$

Poniamo $\alpha = x + (x^3 + x^2 + 1)$ e consideriamo una indeterminata y su $\mathbb{F}$. Sia $a = \alpha y + 1$. Si dica se $a + (y^2 + 1)$ è invertibile nell'anello $\mathbb{F}[y]/(y^2 + 1)$ e, in caso lo sia, trovarne l'inverso. Esibire due elementi $u, v \in \mathbb{F}[y]/(y^2 + 1)$ non nulli e tali che $uv = 0$.

Esercizio 6. (a) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (1 + |x|^2)^{-\alpha}$, $x \in \mathbb{R}^n$, è in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

(b) Dimostrare che $f(x) = P_k(x)e^{-|x|^2}$ è in $L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni polinomio P_k di n–variabili reali e di grado $k \geq 0$.

(c) Dire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f(x) = |x|^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, è in $L^1(B_R)$, ove B_R è la palla di $\mathbb{R}^n$ centrata in 0 e di raggio $R > 0$.

(d) Sia $n \mapsto f_n = \dfrac{1}{n}\chi_{[0,n^a]}$, con $1 \leq p < a < q$. Dimostrare che $f_n \to 0$ per $n \to \infty$ in $L^q(\mathbb{R})$, ma non in norma $L^p(\mathbb{R})$.

Esercizio 7. Sia $a_n \geq 0$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$. Dimostrare che:

(a) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ è convergente;

(b) il viceversa dell'affermazione (a) in generale è falso;

(c) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ è convergente, con $a_n > 0$ e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}} \qquad \text{per ogni } n \geq N,$$

per qualche $N > 0$, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente;

(d) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ sono entrambe convergenti, allora $a_n = 0$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$.

Esercizio 8. Si consideri una successione infinita di prove indipendenti ognuna con probabilità di successo $p \in [0, 1]$. Si dimostri che se $a(k) = k$, allora:

(1) con probabilità 1 solo per un numero finito di k accade che, a partire dalla prova k, ci siano $a(k)$ successi consecutivi.

(2) Si provi poi che, se $b(k) = 5$, allora con probabilità 1 accade che per infiniti k, a partire dalla prova k, ci sono $b(k)$ successi consecutivi.

(3) Provare infine a migliorare i risultati precedenti, trovando delle funzioni non banali $a(k) < k$ e $b(k)$, con $\lim_{k\to\infty} b(k) = \infty$, per cui valgono ancora (1) e (2), rispettivamente.

Esercizio 9. Un bastoncino viene spezzato a caso in due parti e poi la parte maggiore viene ulteriormente spezzata a caso. Calcolare la probabilità che si possa formare un triangolo con i tre pezzetti ottenuti.

Si suggerisca poi una distribuzione per i punti di rottura che rappresenti il fatto che tali punti tendono a trovarsi maggiormente verso il centro. Si calcoli, nel modo più esplicito possibile, la probabilità di formare, anche in questo caso, un triangolo.

Esercizio 10. Un punto materiale di massa m si muove lungo l'asse x sotto l'azione di un campo di forze conservativo con energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2\left(k + \frac{\epsilon}{2}x^2\right),$$

ove k e ϵ sono costanti reali.

1. Determinare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità al variare di k e ϵ.

2. Determinare il tipo di moto al variare dell'energia totale E e disegnare i corrispondenti ritratti di fase.
3. Nei casi periodici determinare il periodo e il limite per valori dell'energia che tendono all'energia dell'equilibrio stabile.

Esercizio 11. Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi sulla superficie di un cono circolare retto con asse verticale. Sul punto agisce anche una forza elastica ideale di costante K e punto di attrazione coincidente con il vertice del cono.

1. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema e determinarne due integrali primi.
2. Discutere gli eventuali equilibri del sistema.

L'asse del cono viene inclinato in modo da formare un angolo α con la verticale:

1. Determinare le nuove posizioni di equilibrio.
2. Determinare le equazioni delle piccole oscillazioni del sistema.

Esercizio 12. Data la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

dimostrare che, per $\alpha > 2$:

1. A_n è definita positiva;
2. A_n^{-1} ha elementi positivi.

Dimostrare inoltre che, detto $x_i = \det(A_i)$, si ha che la successione $\{x_i\}$ soddisfa l'equazione alle differenze

$$x_{i+1} = \alpha x_i - x_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \dots,$$

con le condizioni iniziali $x_0 = 1, \quad x_1 = \alpha$.

Esercizio 13. Data la matrice A_n definita nel precedente esercizio, calcolare formalmente l'espressione dei coefficienti della fattorizzazione

$$A_n = L\,D\,L^T,$$

in cui

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ b_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Per quali valori di α gli elementi del fattore D tendono ad un punto limite per $n \to \infty$? Dimostrare che, in questo caso, gli elementi della successione $\{d_i\}$ hanno segno costante e, pertanto, la fattorizzazione stessa risulta essere definita. (Suggerimento: porre $d_i = x_{i+1}/x_i$).

Esercizio 14. Si supponga di avere una azienda che produce due prodotti, A e B. Ciascuno di questi deve essere lavorato in 3 differenti laboratori, con i seguenti requisiti temporali per unità di prodotto:

prodotto	laboratorio 1	laboratorio 2	laboratorio 3
A	2	5	3
B	6	3	3

Sapendo che:

- i 3 laboratori lavorano, rispettivamente, al più 60, 60 e 42 ore per ciclo produttivo,
- i due prodotti garantiscono, rispettivamente, un profitto unitario di 3 e 5,

massimizzare il guadagno complessivo. Ciò premesso:

1. descrivere matematicamente il precedente problema di ottimizzazione,
2. risolvere graficamente.